

文章编号: 1007-6654(2013)02-0100-06

## 双 $\Lambda$ 原子系统中的有效哈密顿量

庞秀梅, 张俊香<sup>†</sup>, 朱诗尧

(量子光学与光量子器件国家重点实验室, 山西大学光电研究所, 山西 太原 030006)

摘要: 用微扰论方法计算了光与双  $\Lambda$  原子系统相互作用的有效哈密顿量, 计算结果表明, 在考虑到二阶微扰项的情况下, 有效哈密顿量合理地解释了拉曼过程所产生的非线性效应, 从而可用于分析原子非线性引起的非经典效应随泵浦场的拉比频率、泵浦场失谐的变化关系。

关键词: 双  $\Lambda$  型原子系统; 微扰论; 有效哈密顿量

中图分类号: O431

文献标识码: A

doi: 10.3788/ASQO20131902.0100

### 0 引言

光场与物质相互作用是量子光学领域中最重要课题之一。而有效哈密顿量在量子光学领域中扮演着基础而重要的角色<sup>[1]</sup>。光与原子之间的相互作用可以产生许多新奇而重要的量子相干效应和量子现象, 如相干布局俘获(CPT)<sup>[2,3]</sup>、电磁诱导透明(EIT)<sup>[4,5]</sup>、电磁诱导吸收(EIA)<sup>[6,7]</sup>、无粒子数反转放大激光(LWI)<sup>[8,9]</sup>、光减速与超光速<sup>[10-12]</sup>、量子纠缠以及非经典光场、非线性效应增强等一系列有趣的量子现象。这一系列现象的描述, 其辐射场与介质相互作用的哈密顿量是讨论问题的基本出发点。

纠缠光作为量子信息处理和量子通信的重要资源, 需与介质相互作用才能完成信息的存储功能, 为此, 要求纠缠光的频率与原子共振跃迁频率相等, 同时需要窄频宽来保证光与介质的有效耦合。因此获得高亮度、窄带宽、相干时间长的纠缠光源是十分必要的。1999年, M. D. Lukin

等人提出了在一个双  $\Lambda$  型的四能级原子模型中, 基于原子相干效应, 可以利用 EIT 介质中增强的四波混频效应产生强度关联的非经典场<sup>[13]</sup>。之后, C. F. McCormick 等人也应用类似双  $\Lambda$  型结构的三能级原子系统, 利用四波混频效应在热 Rb 气体中实现了 -3.5 dB 的强度差压缩, 产生了窄频宽、近原子共振的压缩光场<sup>[14]</sup>。随后在 2008 年获得了低于散粒噪声基准 8 dB 的强度差压缩<sup>[15]</sup>。同年, V. Boyer 小组还是在该模型的基础上实现了量子成像<sup>[16]</sup>。该系统一直被认为是产生窄频宽, 并与原子共振跃迁频率相同压缩光的有效办法。然而这一系列实验研究工作都基于定性的 Raman 非线性解释, 相应的定量化理论模型将会对讨论各种参数的影响具有实际意义, 为此, 我们基于该原子模型, 应用二阶微扰论的方法计算了光场与双  $\Lambda$  型原子相互作用的有效哈密顿量。该结论可以用来讨论光场与双  $\Lambda$  型三能级原子相互作用后光场的非经典效应随泵浦场

①收稿日期: 2013-03-08

基金项目: 国家自然科学基金(No. 11274210)

作者简介: 庞秀梅(1986—), 女, 山西原平人, 硕士研究生, 研究领域: 光与原子相互作用。E-mail: sxdpxm@163.com

<sup>†</sup>通讯作者: 张俊香, E-mail: junxiang@sxu.edu.cn

的拉比频率, 泵浦场失谐等参量变化的关系, 该结果对于在原子系统中产生非经典光场方面的实验研究具有理论指导意义。

## 1 基本模型

如图 1 所示, 考虑一双  $\Lambda$  型原子结构模型, 其中  $|3\rangle$  是激发态,  $|1\rangle$  和  $|2\rangle$  是基态。能级  $|l\rangle$  ( $l = 1, 2, 3$ ) 之间的频率差为  $\omega_{lj} = \omega_l - \omega_j$ 。一束频率为  $\omega_0$  的泵浦场同时作用于能级  $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$  和  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$  之间, 而且失谐分别为  $\Delta = \omega_0 - \omega_{31}$  和  $\delta + \Delta = \omega_0 - \omega_{32}$ , 其中  $\delta = \omega_{21}$  为能级  $|2\rangle$  和  $|1\rangle$  之间的频率差。泵浦场的拉比频率为  $\Omega$ 。

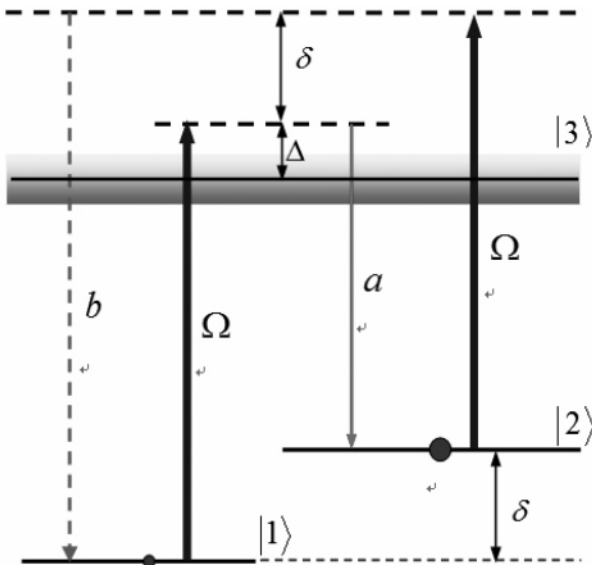


图 1 原子的能级结构

Fig. 1 (Color online) The level diagram

在远失谐的泵浦场作用下, 由于 Raman 过程, 原子吸收一个泵浦光子, 从基态  $|2\rangle$  跃迁到激发态  $|3\rangle$ , 从激发态  $|3\rangle$  回到基态  $|1\rangle$  的过程中产生一个频率为  $\omega_b$  的光子。然后再吸收一个泵浦光子, 原子从基态  $|1\rangle$  被激发到能态  $|3\rangle$  再回到能态  $|2\rangle$  产生一个频率为  $\omega_a$  的光子。该模型最重要的特点是光场通过两个超精细基态之间的相干性来耦合, 因而在激发态原子的布局数很少, 这样就会强烈的抑制原子的自发辐射; 同时, 在该模型中, 原子与光场的失谐量很大, 这样就会大大的减少原子对产生的量子化场  $\hat{a}, \hat{b}$  的吸收 ( $\hat{b}, \hat{a}$

分别为产生的量子化场的湮灭算符)。在下面的讨论中, 我们考虑一个理想系统, 忽略了多普勒效应和朗之万噪声的影响。

## 2 哈密顿量和运动方程

在旋转波近似下系统的哈密顿量为 ( $\hbar = 1$ )

$$H = \sum_{l=1}^3 \omega_l \sigma_{ll} + H_V(t) \quad (1)$$

其中相互作用哈密顿量为

$$H_V(t) = (\Omega e^{-i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_b t}) \sigma_{31} + (\Omega e^{-i\omega_0 t} + a e^{-i\omega_a t}) \sigma_{32} + H. C. \quad (2)$$

其中  $\Omega = \bar{\Omega} e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}}$ ,  $a = d_{32} \bar{a} e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{r}}$ ,  $b = d_{31} \bar{b} e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}$ ,  $d_{31}, d_{32}$  是耦合常数,  $\vec{k}_p$  为泵浦场的波矢,  $\vec{k}_b, \vec{k}_a$  为产生场的波矢。

在偶极近似的条件下, 原子算符满足海森堡运动方程:

$$\dot{\sigma}_{mn} = i\omega_{mn} \sigma_{mn} + i[H_V(t), \sigma_{mn}] \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式, 得到运动方程:

$$\dot{\sigma}_{11} = \gamma_1 \sigma_{33} + i(\Omega + e^{-i\delta t} b) e^{-i\omega_0 t} \sigma_{31} - i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) e^{i\omega_0 t} \sigma_{13} \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \gamma_2 \sigma_{33} + i(\Omega + e^{i\delta t} a) e^{-i\omega_0 t} \sigma_{32} - i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) e^{i\omega_0 t} \sigma_{23} \quad (5)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = -(\gamma_1 + \gamma_2) \sigma_{33} - i(\Omega + e^{-i\delta t} b) e^{-i\omega_0 t} \sigma_{31} - i(\Omega + e^{i\delta t} a) e^{-i\omega_0 t} \sigma_{32} + i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) e^{i\omega_0 t} \sigma_{13} + i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) e^{i\omega_0 t} \sigma_{23} \quad (6)$$

$$\dot{\sigma}_{31} = (i\omega_{31} - \gamma_{31}) \sigma_{31} + i(\Omega^* e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_b t} b^\dagger) (\sigma_{11} - \sigma_{33}) + i(\Omega^* e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_a t} a^\dagger) \sigma_{21} \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}_{32} = (i\omega_{32} - \gamma_{32}) \sigma_{32} + i(\Omega^* e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_b t} b^\dagger) \sigma_{12} + i(\Omega^* e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_a t} a^\dagger) (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \quad (8)$$

$$\dot{\sigma}_{21} = (i\omega_{21} - \gamma_{21}) \sigma_{21} - i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) e^{i\omega_0 t} \sigma_{23} + i(\Omega + e^{i\delta t} a) e^{-i\omega_0 t} \sigma_{31} \quad (9)$$

其中  $\delta = \omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0 = \omega_{21}$ 。原子从激发态  $|3\rangle$  到基态  $|1\rangle$  和  $|2\rangle$  的衰变率分别为  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ 。 $\gamma_{31}, \gamma_{32}$  和  $\gamma_{21}$  分别是能级  $|3\rangle$  和  $|1\rangle, |3\rangle$  和  $|2\rangle, |2\rangle$  和  $|1\rangle$  之间的衰变率。

引入如下变换:

$$\begin{aligned} Q_{mm} &= \sigma_{mm} \quad (m = 1, 2, 3) \\ Q_{31} &= \sigma_{31} e^{-i\omega_0 t} \\ Q_{32} &= \sigma_{32} e^{-i\omega_0 t} \\ Q_{21} &= \sigma_{21} \end{aligned} \quad (10)$$

原子算符的运动方程变为

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{11} &= \gamma_1 Q_{33} - i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) Q_{13} + \\ &\quad i(\Omega + e^{-i\delta t} b) Q_{31} \\ \dot{Q}_{22} &= \gamma_2 Q_{33} - i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) Q_{23} + \\ &\quad i(\Omega + e^{i\delta t} a) Q_{32} \\ \dot{Q}_{33} &= -(\gamma_1 + \gamma_2) Q_{33} - i(\Omega + e^{-i\delta t} b) Q_{31} - \\ &\quad i(\Omega + e^{i\delta t} a) Q_{32} + i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) Q_{13} + \\ &\quad i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) Q_{23} \quad (11) \\ \dot{Q}_{31} &= i\Gamma_p Q_{31} + i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) (Q_{11} - Q_{33}) + \\ &\quad i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) Q_{21} \\ \dot{Q}_{32} &= -i\Gamma_a Q_{32} + i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) Q_{12} + \\ &\quad i(\Omega^* + e^{-i\delta t} a^\dagger) (Q_{22} - Q_{33}) \\ \dot{Q}_{21} &= i\Gamma_{21} Q_{21} - i(\Omega^* + e^{i\delta t} b^\dagger) Q_{23} + \\ &\quad i(\Omega + e^{i\delta t} a) Q_{31} \quad (12) \end{aligned}$$

其中  $\Gamma_p = -\Delta + i\gamma_{31}$ ,  $\Gamma_a = \delta + \Delta - i\gamma_{32}$ ,  $\Gamma_{21} = \delta + i\gamma_{21}$ ,  $\Delta = \omega_0 - \omega_{31}$ 。

使用微扰论的方法求解  $Q_{31}$  和  $Q_{23}$ , 假定:

$$\begin{aligned} Q_{31} &= Q_{31}^{(0)} + Q_{31}^{(1)} + Q_{31}^{(2)} + \dots \\ Q_{23} &= Q_{23}^{(0)} + Q_{23}^{(1)} + Q_{23}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

注意到  $Q_{31}^{(0)}$  和  $Q_{23}^{(0)}$  不包含光场算符  $\hat{a}$  (或  $\hat{b}$ ),  $Q_{31}^{(1)}$  和  $Q_{23}^{(1)}$  只包含其中一个光场算符, 而  $Q_{31}^{(2)}$  和  $Q_{23}^{(2)}$  同时包含两个算符。将(13)式和(10)式代入(2)式, 我们只保留含有量子化算符  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  的项, 于是将原子算符  $Q_{31}$  和  $Q_{32}$  近似到二阶, 此时有效的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_V(t) &= (\Omega + b e^{-i\delta t}) (Q_{31}^{(0)} + Q_{31}^{(1)} + Q_{31}^{(2)}) + \\ &\quad (\Omega^* + a^\dagger e^{-i\delta t}) (Q_{23}^{(0)} + Q_{23}^{(1)} + Q_{23}^{(2)}) + H. C. \\ &\approx b e^{-i\delta t} Q_{31}^{(1)} + \Omega Q_{31}^{(2)} + \\ &\quad a^\dagger e^{-i\delta t} Q_{23}^{(1)} + \Omega^* Q_{23}^{(2)} + H. C. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式中的约等号是因为我们只保留了关联项, 而去掉了仅含有单个光场算符  $\hat{a}$  (或  $\hat{b}$ ) 的项和常数项。

### 3 用微扰论求解 $Q_{31}$ 和 $Q_{32}$

通过方程(10)-(12)可得  $Q_{31}$  和  $Q_{23}$  的零阶稳态解为

$$Q_{11}^{(0)} = \frac{1}{G} [\delta^2 (\Delta^2 + \gamma^2) + \delta(\delta + 2\Delta) |\Omega|^2 + 4 |\Omega|^4] \quad (15)$$

$$Q_{22}^{(0)} = \frac{1}{G} [\delta^2 (\Delta^2 + 2\Delta\delta + \gamma^2 + \delta^2) - \delta(\delta + 2\Delta) |\Omega|^2 + 4 |\Omega|^4] \quad (16)$$

$$Q_{33}^{(0)} = \frac{2\delta^2}{G} |\Omega|^2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Q_{31}^{(0)} &= \frac{\delta}{G} \Omega^* [(\gamma + \Delta) \delta + 2 |\Omega|^2] \\ &= (Q_{13}^{(0)})^* \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q_{23}^{(0)} &= \frac{\delta}{G} \Omega [(\delta + \Delta - \gamma) \delta - 2 |\Omega|^2] \\ &= (Q_{32}^{(0)})^* \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q_{21}^{(0)} &= \frac{|\Omega|^2}{G} [\delta(\delta - 2i\gamma) - 4 |\Omega|^2] \\ &= (Q_{12}^{(0)})^* \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$G = \delta^2 (\delta^2 + 2\Delta\delta + 2\Delta^2 + 2\gamma^2) + 2\delta^2 |\Omega|^2 + 8 |\Omega|^4$$

从(15)-(20)式可清楚地看出, 在满足条件  $|\Delta/\delta|^2 \approx 0$  和  $|\gamma/\delta|^2, |\Omega/\delta|^2, |\Delta\Omega/\delta^2| \rightarrow 0$  时,  $Q_{11}^{(0)} \approx Q_{33}^{(0)} \approx Q_{31}^{(0)} \approx Q_{23}^{(0)} \approx Q_{21}^{(0)} \approx 0$ , 而且  $Q_{22}^{(0)} \approx 1$ , 这意味着强的泵浦场和弱的探针场使得大部分原子布局在  $|2\rangle$  态上。

使用类似的方法, 我们可以得到  $Q_{31}$  和  $Q_{23}$  的一阶稳态解为:

$$Q_{31}^{(1)} = \frac{H_{31}^{(1)}}{N}, \quad Q_{23}^{(1)} = \frac{H_{23}^{(1)}}{N} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{31}^{(1)} &\rightarrow -ae^{(i\delta t)} (\Omega^*)^2 \frac{2\gamma^2 \delta^2}{G} \times \\ &\quad [\delta^2 (-\Delta - i\gamma) (\Delta^2 + 2\Delta\delta + \gamma^2 + \delta^2) - \\ &\quad \delta(4\gamma^2 - 2i\gamma\delta - 4i\Delta\gamma + \\ &\quad 3\delta^2 + 4\Delta\delta) |\Omega|^2 + \\ &\quad 2(2i\gamma + 6\Delta + \delta) |\Omega|^4] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} H_{23}^{(1)} &\rightarrow -b^\dagger e^{(i\delta t)} \Omega^2 \frac{2\gamma^2 \delta^2}{G} [\delta^2 (\Delta^2 + \gamma^2) \times \\ &\quad (-\Delta + i\gamma - \delta) + \delta(4\gamma^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2i\gamma\delta + 4i\Delta\gamma - \delta^2 - 4\Delta\delta) |\Omega|^2 - \\ & 2(-6\Delta + 2i\gamma - 5\delta) |\Omega|^4] \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$N = 2\gamma^2 |\Omega|^2 G$$

(22)和(23)中的箭头是因为我们仅保留了包含单个光场算符并且满足位相匹配条件的项。

来自一阶稳态解  $Q_{31}^{(1)}$  和  $Q_{23}^{(1)}$  的关联项为

$$\begin{aligned} & be^{-i\delta t} Q_{31}^{(1)} + a^\dagger e^{-i\delta t} Q_{23}^{(1)} + H. C. \\ & = be^{-i\delta t} \frac{H_{31}^{(1)}}{N} + a^\dagger e^{-i\delta t} \frac{H_{23}^{(1)}}{N} + H. C. \\ & \rightarrow \Delta ab + \Lambda^* a^\dagger b^\dagger \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{\delta^2}{G} \{ & i\delta^2 [2\gamma^2 - i\gamma\delta + \\ & (\delta + 2\Delta)(\delta + \Delta)](\gamma - i\Delta) \frac{\Omega^*}{\Omega} + \\ & 4\delta^2(\delta + 2\Delta)(\Omega^*)^2 - \\ & 4(2i\gamma + 6\Delta + 3\delta) |\Omega|^2 (\Omega^*)^2 \} \end{aligned} \quad (25)$$

在考虑二阶项的情况下,  $Q_{31}^{(2)}$  和  $Q_{23}^{(2)}$  的二阶解为

$$Q_{31}^{(2)} = \frac{H_{31}^{(2)}}{N}, \quad Q_{23}^{(2)} = \frac{H_{23}^{(2)}}{N} \quad (26)$$

其中

$$H_{31}^{(2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma & \Omega^* & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma & 0 & n_2 & \Omega^* & -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega^* & 0 & -\Omega^* & 0 & n_3 & 0 & 0 & \Omega^* & 0 \\ 0 & -\Omega^* & \Omega^* & 0 & n_4 & 0 & (\delta + \Delta - i\gamma) & 0 & -\Omega^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_5 & -\Omega^* & 0 & \delta & 0 \\ \Omega & 0 & -\Omega & (-\Delta - i\gamma) & n_3^* & 0 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & \Omega & 0 & n_4^* & (\delta + \Delta + i\gamma) & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^* & n_5^* & 0 & -\Omega & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$H_{23}^{(2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma & \Omega^* & -\Omega & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma & 0 & 0 & n_2 & -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega^* & 0 & -\Omega^* & 0 & (-\Delta + i\gamma) & n_3 & 0 & \Omega^* & 0 \\ 0 & -\Omega^* & \Omega^* & 0 & 0 & n_4 & (\delta + \Delta - i\gamma) & 0 & -\Omega^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega & n_5 & 0 & \delta & 0 \\ \Omega & 0 & -\Omega & (-\Delta - i\gamma) & 0 & n_3^* & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & \Omega & 0 & 0 & n_4^* & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega^* & 0 & n_5^* & -\Omega & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (28)$$

如果我们仅仅考虑  $H_{31}^{(2)}$  和  $H_{23}^{(2)}$  中包含  $ab$  和  $a^\dagger b^\dagger$  的项, 因为只有这些项才满足位相匹配条件。来自二阶稳态解  $Q_{31}^{(2)}$  和  $Q_{23}^{(2)}$  的关联项:

$$\begin{aligned} & \Omega Q_{31}^{(2)} + \Omega^* Q_{23}^{(2)} + H. C. \\ & = \Omega \frac{H_{31}^{(2)}}{N} + \Omega^* \frac{H_{23}^{(2)}}{N} + H. C. \\ & \rightarrow \mu ab + \mu^* a^\dagger b^\dagger \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu = \frac{8\gamma^6 |\Omega|^4 \delta^2 \Omega^{*2}}{N^3} \times \\ \{ \delta^4 [\gamma - i(\delta + \Delta)](-i\gamma - \Delta) \times \\ [4\gamma^3 + 6i\gamma^2(\delta + 2\Delta) - \\ 2\gamma(\delta^2 + 6\delta\Delta + 6\Delta^2) + \\ i(\delta^3 - 6\delta\Delta^2 - 4\Delta^3)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\delta^4[-2i\gamma^3 - 9\gamma^2(\delta + 2\Delta) + \\
 & 7(\delta + 2\Delta)(\delta + \Delta)\Delta - \\
 & i\gamma(\delta^2 + 2\delta\Delta + 2\Delta^2)]|\Omega|^2 - \\
 & 4\delta^2(\delta + 2\Delta)(7\delta^2 + 16\delta\Delta + 16\Delta^2)|\Omega|^4 + \\
 & 8\delta^2(2i\gamma - 3\delta - 6\Delta)|\Omega|^6 + \\
 & 32[2i\gamma + 7(\delta + 2\Delta)]|\Omega|^8 \quad (30)
 \end{aligned}$$

#### 4 有效哈密顿量

在二阶微扰论近似下求解与(1)式等价的有效哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H_V & \rightarrow be^{-i\omega t} Q_{31}^{(1)} + \Omega Q_{31}^{(2)} + a^\dagger e^{-i\omega t} Q_{23}^{(1)} + \\
 & \Omega^* Q_{23}^{(2)} + H. C. \\
 & = (\Lambda + \mu) ab + H. C. \\
 & = \lambda ab + \lambda^* a^\dagger b^\dagger \quad (31)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \lambda & = \frac{4\delta^6}{G^3}(\delta + 2\Delta) \times \\
 & \left\{ [\gamma^2 + (\delta + \Delta)^2](\gamma^2 + \Delta^2) \frac{\Omega^*}{\Omega} + \right. \\
 & \left. (\delta^2 - 2\gamma^2 + 6\delta\Delta + 6\Delta^2)(\Omega^*)^2 \right\} - \\
 & \frac{16\delta^2(\delta + 2\Delta)}{G^3} [\delta^2(\gamma^2 + 2\delta^2 + 5\delta\Delta + 5\Delta^2) + \\
 & \delta^2|\Omega|^2 - 8|\Omega|^4] |\Omega|^2 (\Omega^*)^2 \quad (32)
 \end{aligned}$$

考虑到  $\Omega = \bar{\Omega} e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}}$ ,  $a = d_{32} \bar{a} e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{r}}$ ,  $b = d_{31} \bar{b} e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}$ , 在满足位相匹配条件  $\vec{k}_a + \vec{k}_b - 2\vec{k}_p = 0$  的情况下, 得到系统在相互作用绘景中的有效

哈密顿量:

$$H_{eff} = \kappa_1 a^\dagger b^\dagger + \kappa_1^* \bar{a} \bar{b} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 & = \kappa \bar{\Omega}^2 d_{31}^* d_{32}^* \\
 \kappa & = \frac{4\delta^6(\delta + 2\Delta)}{[\delta^2(\delta^2 + 2\delta\Delta + 2\Delta^2)]^3} \times \\
 & \left\{ \frac{[\gamma^2 + (\delta + \Delta)^2](\gamma^2 + \Delta^2)}{|\Omega|^2} + \right. \\
 & \left. (\delta^2 + 6\delta\Delta + 6\Delta^2 - 2\gamma^2) \right\}
 \end{aligned}$$

通过有效哈密顿量中耦合系数  $\kappa_1$  的具体表达式, 它代表 Raman 过程产生的非线性的大小, 可以看出它和泵浦场的拉比频率  $\Omega$ , 泵浦场与原子失谐量  $\Delta$  和双光子失谐  $\delta$  有关。该结果可用于进一步分析光与原子相互作用后光场的非经典特性随各参量变化的关系, 对于产生非经典光场方面的实验研究具有理论指导意义。

#### 5 总结

综上所述, 本文利用微扰论的方法在计算到二阶微扰项的情况下, 用光场算符表达原子算符推导出光场与双  $\Lambda$  型的三能级原子相互作用的有效哈密顿量。获得了光与原子相互作用有效哈密顿量中耦合系数的具体表达式。该结果可用于分析光与原子相互作用后光场的非经典效应随泵浦场的拉比频率, 以及泵浦场失谐变化的关系。

#### 参考文献:

- [1] CARLOS SOLIVEREZ E. General Theory of Effective Hamiltonians [J]. *Phys Rev A*, 1981, **24**(1): 4-9.
- [2] ARIMONDO E, ORRIOLS G. Nonabsorbing Atomic Coherences by Coherent Two-Photon Transitions in a Three-Level Optical Pumping [J]. *Nuovo Cimento Lett*, 1976, **17**: 333-338.
- [3] WYNANDS R, NAGEL A. Precision Spectroscopy with Coherent Dark States [J]. *Appl Phys B*, 1999, **68**: 1-25.
- [4] HARRIS S E, FIELD J E, IMAMOGLU A. Nonlinear Optical Processes Using Electromagnetically Induced Transparency [J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(10): 1107-1110.
- [5] BOILER K-J, IMAMOGLU A, HARRIS S E. Observation of Electromagnetically Induced Transparency [J]. *Phys Rev Lett*, 1991, **66**(20): 2593-2596.
- [6] LEZAMA A, BARREIRO S, AKULSHIN A M. Electromagnetically Induced Absorption [J]. *Phys Rev A*, 1999, **59**(6): 4732-4735.
- [7] TILCHIN E, WILSON-GORDON A D, FIRSTENBERG O. Effects of Thermal Motion on Electromagnetically Induced Absorption [J]. *Phys Rev A*, 2011, **83**(5): 053812.

- [8] HARRIS S E. Lasers Without Inversion: Interference of Lifetime-broadened Resonances [J]. *Phys Rev Lett*, 1989, **62**(9): 1033-1036.
- [9] MARLAN SCULLY O, ZHU Shi-yao, ATHANASIOS GAVRIELIDES. Degenerate Quantum-beat Laser: Lasing Without Inversion and Inversion Without Lasing [J]. *Phys Rev Lett*, 1989, **62**(24): 2813-2816.
- [10] KASAPI A, MANEESH JAIN, YIN G Y, *et al.* Electromagnetically Induced Transparency: Propagation Dynamics [J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **74**(13): 2447-2450.
- [11] BOYER V, MCCORMICK C F, ARIMONDO E, *et al.* Ultraslow Propagation of Matched Pulses by Four-Wave Mixing in an Atomic Vapor [J]. *Phys Rev Lett*, 2007, **99**(14): 143601.
- [12] TURUKHIN A V, SUDARSHANAM V S, SHAHRIAR M S, *et al.* Observation of Ultraslow and Stored Light Pulses in a Solid [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **88**(2): 023602.
- [13] LUKIN M D, MATSKO A B, FLEISCHHAUER M, *et al.* Quantum Noise and Correlations in Resonantly Enhanced Wave Mixing Based on Atomic Coherence [J]. *Phys Rev Lett*, 1999, **82**(9): 1847-1850.
- [14] MCCORMICK C F, BOYER V, ARIMONDO E, *et al.* Strong Relative Intensity Squeezing By Four-wave Mixing in Rubidium Vapor [J]. *Opt Lett*, 2007, **32**(2): 178-180.
- [15] MCCORMICK C F, MARINO A M, BOYER V, *et al.* Strong Low-frequency Quantum Correlations from a Four-wave-mixing Amplifier [J]. *Phys Rev A*, 2008, **78**(4): 043816.
- [16] BOYER V, MARINO A M, POOSER R C, *et al.* Entangled Images from Four-Wave Mixing [J]. *Science*, 2008, **321**: 544-547.

## The Effective Hamiltonian of a Double $\Lambda$ -type Atomic System

PANG Xiu-mei, ZHANG Jun-xiang, ZHU Shi-yao

(The State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** In this paper, the effective Hamiltonian of a double  $\Lambda$ -type atomic system is calculated via the perturbation to second order, which can be used to discuss the nonlinear process of the Raman interaction, leading to the nonclassical effect. Therefore the dependence of nonclassical on rabi frequency and detuning of pump fields can be easily found.

**Key words:** double  $\Lambda$ -type atomic system; perturbation method; the effective Hamiltonian